Задание 1

Построить таблицу истинности для заданной формулы:

(¬A&C ∨ A&B ∨ ¬A&¬B&¬C)& (¬A&¬B ∨ B&¬(A&C))

Формула содержит три атома A, B, C. Для такой формулы существует 8 интерпретаций.

Таблица истинности принимает вид:

A	B	C	(¬A&C ∨ A&B ∨ ¬A&¬B&¬C)	(¬A&¬B ∨ B&¬(A&C))	F
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0

Задание 2

Упростить выражение (левую часть):

$(A\&B \vee \neg (A\&B)\&C \vee A\&\neg C)\&(A \vee C\&\neg A \vee B\&\neg(A \vee C))=A \vee C$

Согласно правилу Де-Моргана раскроем скобку $\neg (A \vee C))= \neg A\&\neg C$

Тогда: $B\&\neg (A \vee C)=B\&\neg A\&\neg C$

Тогда выражение в правой скобке можно упростить:

$A \vee C\&\neg A \vee B\&\neg (A \vee C)=A \vee (B\&\neg A\&\neg C) \vee (C\&\neg A)=$

$= (A \vee C) \vee (B\&\neg A\&\neg C) =(A \vee C \vee B)\&(A \vee C \vee \neg A)\&(A \vee C \vee \neg C)=$

$= A \vee C \vee B$

Подобные преобразования выполняем и с левой скобкой:

$(A\&B) \vee \neg (A\&B)\&C \vee (A\&\neg C)=$

$=(A\&B) \vee C \vee (A\&\neg C)=$

$= A\&B \vee C \vee A=C \vee A=A \vee C$

Общеевыражение принимает вид:$(A \vee C)\&(A \vee C \vee B)$

Применяя формулу поглощения получаем: $A \vee C$

Задание 3

Представить в ДНФ и в КНФ следующие формулы:

$\neg(\neg A \vee A\&B\&\neg C) \vee \neg(\neg B \vee C)\&(\neg A \vee B)$

Получим ДНФ:

$\neg(\neg A \vee A\&B\&\neg C) \vee \neg(\neg B \vee C)\&(\neg A \vee B)=$

$=\neg((\neg A \vee A)\&(\neg A \vee B)\&(\neg A \vee \neg C) \vee (B\&\neg C)\&(\neg A \vee B)=$

$=\neg((\neg A \vee B)\&(\neg A \vee \neg C) \vee (B\&\neg C)\&(\neg A \vee B)=$

$=\neg((\neg A\&(B \vee \neg C)) \vee (B\&\neg C\&B) \vee (\neg A\&\neg C\&B)=$

$=\neg((\neg A\&(B \vee \neg C)) \vee (B\&\neg C) \vee (\neg A\&\neg C\&B)=$

$=\neg((\neg A\&(B \vee \neg C)) \vee (B \vee \neg C)\&(\neg A)=$

$=A \vee (\neg B\&C) \vee (B\&\neg A) \vee (\neg C\&\neg A)=$

$=A \vee (B\&\neg C)$

Получим КНФ:

$\neg(\neg A \vee A\&B\&\neg C) \vee \neg(\neg B \vee C)\&(\neg A \vee B)=A \vee (B\&\neg C)=$

$=(A \vee B)\&(A\neg \vee C)$

Задача 4

Формализовать представленные рассуждения в виде формул алгебры логики.

Или Валя и Борис одного возраста, или Валя старше Бориса. Если Валя и Борис одного возраста, то Наташа и Борис не одного возраста. Если Валя старше Бориса, то Борис старше Сергея. Следовательно, или Наташа и Борис не одного возраста, или Борис старше Сергея.

Введем следующие обозначения:

A – Валя и Борис одного возраста

B – Валя старше Бориса

C–Наташа и Борис одного возраста

D – Борис старше Сергея

Формализация рассуждения:

$A \vee B,\ A \to \neg C,\ B \to D \vdash \neg C \vee D$

Задание 5

Для формализованного в задаче 4 рассуждения доказать логическое следствие заключения из посылок: $A \vee B$, $A \to \neg C$, $B \to D \vdash \neg C \vee D$

В формализованном выше рассуждении из трех посылок следует заключение $\neg C \vee D$.

$A \vee B$

$A \to \neg C$

$B \to D$

____

$\neg C \vee D$

Доказательство логического следования.

Построим формулу по Теореме 1 о логическом следовании:

$(A \vee B)\&(A \to \neg C)\&(B \to D) \to (\neg C \vee D)$

Наша цель – доказать общезначимость этой формулы.

Выполним следующие преобразования. Избавляемся от импликаций:

$\neg((A \vee B)\&(\neg A \vee \neg C)\&(\neg B \vee D)) \vee (\neg C \vee D)$

Применяем правила Де-Моргана:

$\neg(A \vee B) \vee \neg(\neg A \vee \neg C) \vee \neg(\neg B \vee D) \vee (\neg C \vee D)=$

$=(\neg A\&\neg B) \vee (A\&C) \vee (B\&\neg D) \vee \neg C \vee D$

Перегруппируем слагаемые и применим тождества для упрощения:

$=(\neg A\&\neg B) \vee (A\&C) \vee \neg C \vee (B\&\neg D) \vee D=$

$=(\neg A\&\neg B) \vee A \vee \neg C \vee B \vee \neg D=$

$=\neg B \vee A \vee \neg C \vee B \vee \neg D$

Выделенные элементы в формуле дают ИСТИНУ, значит:

$A \vee \neg C \vee И \vee \neg D=И$

Соответственно, логическое следствие доказано.

Задание 6

1.Пусть S(x) означает «число x – делится нацело на 3»

Что означают утверждения:

S(7)

S(12)

∀xS(x)

2.Какие из них истинны, какие нет?

S(7) – ЛОЖЬ (7 не делится нацело на 3)

S(12) – ИСТИНА (12 делится нацело на 3)

∀xS(x) – ЛОЖЬ (каждый x не делится нацело на 3)

3. Введен предикат L(x,y) «x любит y -ка»

Как записать утверждения:

«Марго не любит Ваню»: ¬L(Марго,Ваня)

«Каждый любит кого-нибудь»: ∀x ∃y:L(x,y)

«Кто-то не любит никого»: ∃x ∃!y: ¬L(x,y)

Задание 7

Формализовать рассуждение на языке ИП: ввести необходимые предикаты, переменные, константы. С их помощью записать в виде формул посылки и заключение.

Ни один республиканец или демократ не является социалистом. Джон-социалист. Следовательно, Джон не республиканец.

Введем предикаты:

$R(x)$ – быть республиканцем

$D(x)$ – быть демократом

$S(x)$ – быть социалистом

Посылка1: $\forall x((R(x) \lor D(x)) \to \neg S(x))$

Посылка2: $S(\text{Джон})=\text{И}$

Заключение:

$\neg R(\text{Джон})$

Задание 8

Доказать справедливость рассуждения на языке ИП. Построить множество дизъюнктов для рассуждения. Для этого привести посылки и отрицание заключения к ПНФ, а затем к Сколемовской стандартной форме.

Использовать формализацию из задания № 7

Ни один республиканец или демократ не является социалистом. Джон-социалист. Следовательно, Джон не республиканец.

Докажем рассуждение «от противного», построив логическое произведение посылок и отрицания заключения.

Посылка1: $\forall x((R(x) \vee D(x)) \rightarrow \neg S(x)) = \forall x(\neg(R(x) \vee D(x)) \vee \neg S(x))$ Формула преобразована к ПНФ

Посылка2: S(Джон) Формула преобразована к ПНФ

Заключение:

¬R(Джон) формула преобразована в ПНФ

Преобразование Сколема и получение множества дизъюнктов

Посылка1: ПНФ: $\forall x(\neg(R(x) \vee D(x)) \vee \neg S(x)) =$

$\forall x((\neg R(x) \& \neg D(x)) \vee \neg S(x)) = \forall x((\neg R(x) \vee \neg S(x)) \& (\neg D(x) \vee \neg S(x))$

Получаем 2 дизъюнкта: $\neg R(x) \vee \neg S(x)$ и $\neg D(x) \vee \neg S(x)$

Посылка2: S(Джон) - единственный дизъюнкт

Отрицание заключения:

¬(¬R(Джон))= R(Джон) - единственный дизъюнкт

По теореме о логическом следствии построим произведение:

(Посылка 1)&(Посылка 2)&¬ (Заключение)

$(\neg R(x) \vee \neg S(x)) \& (\neg D(x) \vee \neg S(x)) \&$ S(Джон)& R(Джон)

Поскольку Посылка 1 верна для всех x, то она будет верна и для x=Джон.

Тогда:

(¬R(Джон) ∨ ¬S(Джон))&(¬ D(Джон) ∨ ¬S(Джон))& S(Джон)& R(Джон)=

=(R(Джон)& ¬R(Джон) ∨ R(Джон)& ¬S(Джон))& (S(Джон)& ¬D(Джон) ∨ S(Джон)& ¬S(Джон))

Выделенные цветом произведения обращаются в ноль (Ложь), тогда остается произведение:

R(Джон)& ¬S(Джон))& S(Джон)& ¬D(Джон)

В нем выделенные члены также обращаются в ноль (Ложь), соответственно и все произведение обращается в ноль (Ложь), а это значит, что исходное рассуждение верно.

Задание 9

Доказать справедливость рассуждения (взять свой вариант из задания на исчисление высказываний) методом резолюции.

Или Валя и Борис одного возраста, или Валя старше Бориса. Если Валя и Борис одного возраста, то Наташа и Борис не одного возраста. Если Валя старше Бориса, то Борис старше Сергея. Следовательно, или Наташа и Борис не одного возраста, или Борис старше Сергея.

Введем следующие обозначения:

A – Валя и Борис одного возраста

B – Валя старше Бориса

C–Наташа и Борис одного возраста

D – Борис старше Сергея

Формализация рассуждения:

$A \vee B, A \to \neg C, B \to D \vdash \neg C \vee D$

Доказательство методом резолюции выполняется только «от противного»: К произведению всех посылок добавляем отрицание заключения:

$(A \vee B) \& (A \to \neg C) \& (B \to D) \& \neg (\neg C \vee D)$

Приводим к КНФ:

$(A \vee B) \& (\neg A \vee \neg C) \& (\neg B \vee D) \& \neg (\neg C \vee D) =$

$= (A \vee B) \& (\neg A \vee \neg C) \& (\neg B \vee D) \& C \& \neg D$

Строим S – множество дизъюнктов, входящих в КНФ:

$D1 = (A \vee B)$

$D2 = (\neg A \vee \neg C)$

$D3 = (\neg B \vee D)$

$D4 = C$

$D5 = \neg D$

Для доказательства противоречивости S нужно убедиться в том, что множество дизъюнктов S содержит пустой (ложный) дизъюнкт

Поскольку S первоначально такого дизъюнкта не содержит, надо вывести его, используя правило порождения новых дизъюнктов из исходных. Новые дизъюнкты получаем методом резолюции и добавляем их к множеству S.

D1=(A ∨ B)

D2=(¬A ∨ ¬C)

D3=(¬B ∨ D)

D4=C

D5=¬D

D7: ¬A (Резольвента D2, D4)

D8: B (Резольвента D1, D7)

D9: D (Резольвента D3, D8)

D10: ✹ (Резольвента D5, D9)

Итак, мы вывели пустой дизъюнкт и доказали противоречивость множества S.

Задание 10

Построить множество дизъюнктов для рассуждения. Для этого привести посылки и отрицание заключения к ПНФ, а затем к Сколемовской стандартной форме. Методом резолюции вывести пустой (тождественно ложный) дизъюнкт из исходного множества дизъюнктов, доказав тем самым справедливость рассуждения.

Ни один республиканец или демократ не является социалистом. Джон-социалист. Следовательно, Джон не республиканец.

В ходе решения задачи 8 были получены следующие дизъюнкты:

Посылка 1: Получаем 2 дизъюнкта: $\neg R(x) \vee \neg S(x)$ и $\neg D(x) \vee \neg S(x)$

Посылка2: S(Джон) - единственный дизъюнкт

Заключение:

ПНФ: ¬R(Джон) - единственный дизъюнкт

D1: $\neg R(x) \vee \neg S(x)$

D2: $\neg D(x) \vee \neg S(x)$

D3: S(Джон)

D4: R(Джон))

D5: ¬R(Джон) (резольвента D1 и D3, чтобы её получить была применена подстановка x=Джон)

D6: □(резольвента D4 и D5)

Получен пустой дизъюнкт

Задание 11

Введем обозначения: c – среда обитания, d– теплокровное или холоднокровное, v – класс существа. p– определяет размер существа (большое, среднее, маленькое).

Продукционные правила определяют классификацию живых существ.

p1: (c = вода)&(d= теплокровное) => (v = китообразное)

p2: (c= вода)&(d = холоднокровное) => (v = рыба)

p3: (c= суша) & (d= теплокровное) => (v = млекопитающее)

p4: (c= суша)&(d= холоднокровное) => (v = рептилия)

p5: (p= большое)&(v = китообразное) => “Кашалот”

p6: (p = большое)&(v = рыба) => “Акула”

p7: (p = большое) & (v = млекопитающее) => “Слон”

p8: (p = маленькое)&(v= млекопитающее) => “Мышь”

p9: (p = маленькое) &(v= рыба) => “ Пескарь”

p10: (p = среднее) &(v= китообразное) => “ Дельфин”

p11: (p = среднее)&(v = млекопитающее) => “Конь”

p12: (p = среднее) &(v= рептилия) => “ Змея”

p13: (p = маленькое)&(v = рептилия) => “Ящерица”

Определите, при каких начальных условиях может быть выбрано существо Акула? При каких сочетаниях входных условий выбор не будет сделан? Добавьте недостающие продукции.

Акула **будет** выбрана при следующих сочетаниях:

(c = вода) & (d = холоднокровное) & (p = большое)

Акула **небудет** выбрана при следующих сочетаниях:

(c = суша) ∨ (d = теплокровное) ∨ (p = маленькое) ∨ (p = среднее)

Недостающие продукции:

p14: (p = большое) & (v = рептилия) => “Варан”

p15: (p = среднее) & (v = рептилия) => “Агама”

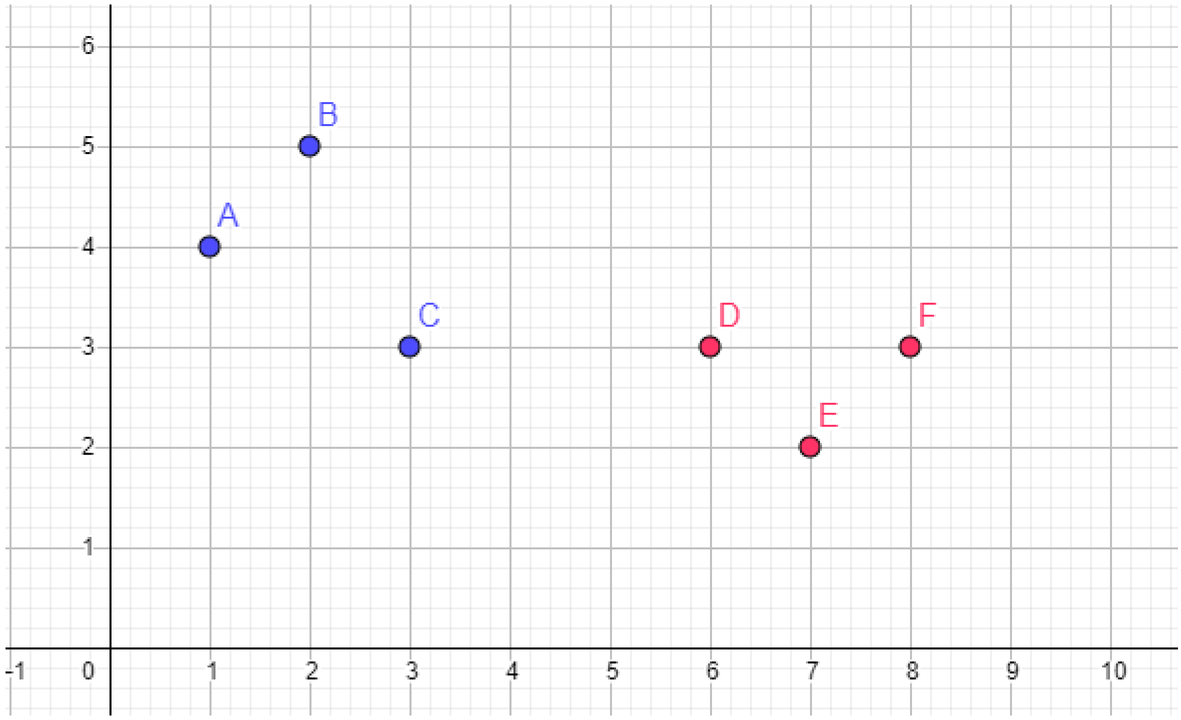
p16: (p = маленькое) & (v = китообразное) => “Карликовый кит”

Задание 12

Задание представлено в строке:

№	Класс 1			Класс 2		
4	<1 , 4>	< 2 , 5 >	<3 , 3>	<6 , 3>	< 7 , 2>	<8 , 3 >

Изобразим точки на плоскости:



Классы 1 и 2 линейно разделимы. Найдём разделяющую линейную функцию и нарисуем её график. Цель – получить линейную разделяющую функцию, которая дает положительные значения для точек 1, 2 и 3 и принимает отрицательные значения для точек 4, 5, 6. Функция должна иметь вид

$$F(x)=w_0+w_1\cdot x_1+w_2\cdot x_2$$

Выполняем итерацию 0. Коэффициенты $w_0=w_1=w_2=0$.

Выполняем итерацию 1. Выбираем первый объект класса С1 – вектор x1=<1,4>. Значение функции $F(x)=0+0\cdot x_1+0\cdot x_2$, (ошибка классификации произошла в первой же точке изшести, так как точка <1, 4> принадлежит классу 1 и функция F(<1, 4>) должна дать значениебольше нуля, а не нулевое). Таким образом, по правилу П8 алгоритма необходима коррекция коэффициентов при значении множителя с=1. Вычисляем новые коэффициенты функции:

$$w_0^1 = w_0 + C = 0 + 1 = 1$$

$$w_1^1 = w_1 + C \cdot x_1 = 0 + 1 \cdot 1 = 1$$

$$w_2^1 = w_2 + C \cdot x_2 = 0 + 1 \cdot 4 = 4$$

Получаем:

$$F^1(x) = 1 + x_1 + 4 \cdot x_2$$

Выполняем итерацию 2. Вычислим последовательно значения $F^1(X)$ для элементов выборки:

$$F^1 ¿$$

$$F^1 ¿$$

$$F^1 ¿ > 0$$

Все элементы класса С1 распознаны правильно. Выбираем текущим класс С2.

$$F^1 ¿$$

Объект распознан не правильно, необходима коррекция коэффициентов при значении множителя с=-1

$$w_0^2 = w_0^1 + C = 1 - 1 = 0$$

$$w_1^2 = w_1^1 + C \cdot x_1 = 1 - 1 \cdot 6 = -5$$

$$w_2^2 = w_2^1 + C \cdot x_2 = 4 - 1 \cdot 3 = 1$$

Новая функция:

$$F^2(x) = x_2 - 5 \cdot x_1$$

Выполняем итерацию 3.

Вычисляем значения функции для элементов выборки:

$$F^2 ¿$$

Необходимо коррекция коэффициентов с поправкой с=1:

$$w_0^3 = w_0^2 + C = 0 + 1 = 1$$

$$w_1^3 = w_1^2 + C \cdot x_1 = -5 + 1 \cdot 1 = -4$$

$$w_2^3 = w_2^2 + C \cdot x_2 = 1 + 1 \cdot 4 = 5$$

Новая функция:

$$F^3(x) = 1 - 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$$

Выполняем итерацию 4.

Вычисляем значения функции для элементов выборки:

F^3¿

F^3¿

F^3¿

Проверяем для второго класса:

F^3¿

F^3¿

F^3¿

Все объекты обучающей выборки разделены правильно, таким образом получена искомая решающая функция:

$$F(x) = 1 - 4 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$$

На рисунке дана геометрическая интерпретация решения: